УДК 517.984

Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с дискретным самоподобным весом

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак*

Аннотация

В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

в случае, когда вес $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$ нулевого спектрального порядка.

§ 1 Введение

1. В настоящей статье нами будет продолжено начатое в работах [СФ] и [ИШЛ] изучение спектральных асимптотик граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где вес $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$. Говоря более точно, мы намерены теперь подвергнуть исследованию ранее не рассмотренный случай, когда спектральный порядок D функции P равен нулю. Определение понятия спектрального порядка квадратично суммируемой самоподобной функции было дано в [СФ, § 3.3].

2. Особенностью случая $D = 0$ является неприменимость использованной в работах [SSM], [СФ] и [ИШЛ] при рассмотрении случая $D > 0$ техники, основанной на теории восстановления. Действительно, указанная техника существенно опирается на факт экспоненциального убывания некоторых вспомогательных функций (см., например, оценку [СФ, (4.11)]), между тем как в случае

*Работа поддержана РФФИ, грант № 07-01-00283, фондом поддержки ведущих научных школ, грант НШ-5247.2006.1, и фондом INTAS, грант 05-1000008-7883.

$D = 0$ для таких функций имеется лишь неулучшаемая, вообще говоря, оценка порядка $O(1)$. В соответствии со сказанным, далее нами будет развита другая методика исследования.

3. В дальнейшем через $\mathfrak{H}$ мы будем обозначать пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, снабжённое скалярным произведением

$$\langle y, z\rangle \rightleftharpoons \int\limits_0^1 y'\overline{z'}\,dx.$$

Через $\mathfrak{H}'$ мы при этом будем обозначать пространство, двойственное к $\mathfrak{H}$ относительно $L_2[0,1]$, т. е. получаемое пополнением пространства $L_2[0,1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{H}'} \rightleftharpoons \sup_{\|z\|_{\mathfrak{H}}=1}\left|\int\limits_0^1 y\overline{z}\,dx\right|.$$

Если рассмотреть оператор вложения $J : \mathfrak{H} \to L_2[0,1]$, то непосредственно из определения пространства $\mathfrak{H}'$ вытекает возможность непрерывного продолжения сопряжённого оператора $J^* : L_2[0,1] \to \mathfrak{H}$ до изометрии $J^+ : \mathfrak{H}' \to \mathfrak{H}$.

Как и в предшествующих работах [СФ] и [ИШЛ], в качестве операторной модели задачи 1 (1), 1 (2) мы будем рассматривать линейный пучок $T_\rho : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$(\forall\lambda\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathfrak{H}) \qquad \langle J^+T_\rho(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P\cdot(|y|^2)'\right)\,dx.$$

4. Через $\operatorname{ind} E$ мы далее будем обозначать отрицательный индекс инерции действующего в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$ ограниченного эрмитова оператора E, т. е. точную верхнюю грань размерностей подпространств $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{E}$, удовлетворяющих условию

$$(\exists\varepsilon>0)\,(\forall y\in\mathfrak{M}) \qquad \langle Ey, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y\|^2_{\mathfrak{E}}.$$

Обозначения n, a_k, d_k и β_k, где $k = 1,\ldots,n$, мы будем использовать для записи параметров самоподобия функции P. Определение этих параметров и описание накладываемых на них условий дано в [СФ, § 3.2]. Особо отметим, что указанные условия гарантируют выполнение неравенств $a_k|d_k| < 1$ (ср. далее формулировки утверждений из параграфа § 3).

Через α_k, где $k = 0,1,\ldots,n$, мы будем обозначать величины, определяемые рекуррентными соотношениями $\alpha_0 \rightleftharpoons 0$ и $\alpha_k \rightleftharpoons \alpha_{k-1} + a_k$ при $k \neq 0$.

Наконец, через m мы будем обозначать натуральное число $m\in[1,n]$, удовлетворяющее условию

$$(\forall k\in[1,n]\setminus\{m\}) \qquad d_k = 0$$

(ср. [СФ, § 3.3]). При этом, ввиду тривиальности случая $d_m = 0$, будет обычно предполагаться выполнение неравенства $d_m \neq 0$.

5. В дальнейшем при ссылках на разделы статьи, не принадлежащие параграфу, внутри которого даётся ссылка, будет дополнительно указываться номер параграфа. При ссылках на формулы, не принадлежащие пункту, внутри которого даётся ссылка, будет дополнительно указываться номер пункта.

§ 2 Вспомогательные понятия и утверждения

1. Рассмотрим два подпространства $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}$, определяемые следующим образом. Подпространство $\mathfrak{H}_1$ имеет вид

$$\mathfrak{H}_1 \risingdotseq \{y \in \mathfrak{H} \mid (\forall x \notin [\alpha_{m-1}, \alpha_m]) \quad y(x) = 0\}.$$

Подпространство $\mathfrak{H}_2$ представляет собой $(n-1)$-мерную линейную оболочку функций $e_k \in \mathfrak{H}$, где $k = 1, \ldots, n-1$, имеющих вид

$$e_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \gamma_k}{\alpha_k - \gamma_k} & \text{при } x \in [\gamma_k, \alpha_k], \\ \dfrac{\delta_k - x}{\delta_k - \alpha_k} & \text{при } x \in [\alpha_k, \delta_k], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где положено

$$\gamma_k \risingdotseq \begin{cases} \alpha_{k-1} & \text{при } k \neq m, \\ \alpha_m - a_m a_n & \text{при } k = m, \end{cases}$$

$$\delta_k \risingdotseq \begin{cases} \alpha_{k+1} & \text{при } k \neq m-1, \\ \alpha_{m-1} + a_m a_1 & \text{при } k = m-1. \end{cases}$$

Имеют место следующие два факта:

1.1. *Ортогональное дополнение прямой суммы $\mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$ допускает представление в виде*

$$\mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2) = \left\{ y \in \mathfrak{H} \,\middle|\, \left(\forall x \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m] \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\alpha_k\} \right) \quad y(x) = 0 \right\}.$$

Справедливость утверждения 1.1 легко устанавливается прямым вычислением.

1.2. *Пусть λ — вещественное число, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ — конечномерное подпространство, на котором квадратичная форма оператора $J^+ T_\rho(\lambda)$ отрицательна. Тогда существует подпространство $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$ размерности $\dim \mathfrak{M}$, на котором квадратичная форма оператора $J^+ T_\rho(\lambda)$ также отрицательна.*

Доказательство. Доказываемое утверждение с очевидностью вытекает из тождества

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2)\, (\forall z \perp \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2) \qquad \langle J^+ T_\rho(\lambda)\, (y+z), (y+z) \rangle = \langle J^+ T_\rho(\lambda) y, y \rangle + \|z\|^2_{\mathfrak{H}},$$

легко получаемого на основе утверждения 1.1 и факта самоподобия функции P. □

2. Рассмотрим два линейных пучка $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ и $C : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_2$ ограниченных операторов, удовлетворяющие тождествам

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \qquad \langle A(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx,$$

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathfrak{H}_2) \qquad \langle C(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx,$$

а также оператор $B : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$, удовлетворяющий тождеству

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1)\,(\forall z \in \mathfrak{H}_2) \qquad \langle By, z\rangle = \int\limits_0^1 y'\overline{z'}\,dx.$$

Имеют место следующие два факта:

2.1. *Пусть λ — вещественное число. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} A(\lambda) = \operatorname{ind} J^+ T_\rho(a_m d_m\,\lambda).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим изометрический оператор $U : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}$, определяемый тождеством

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1)\,(\forall x \in [0,1]) \qquad [Uy](x) = \frac{y(\alpha_{m-1} + a_m x)}{\sqrt{a_m}}.$$

Доказываемое утверждение с очевидностью вытекает из тождества

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \qquad \langle A(\lambda)y, y\rangle = \langle J^+ T_\rho(a_m d_m\,\lambda)Uy, Uy\rangle,$$

легко устанавливаемого непосредственными выкладками с учётом самоподобия функции P. □

2.2. *Пусть λ — вещественное число, не принадлежащее спектру пучка C. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} J^+ T_\rho(\lambda) = \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda)B] + \operatorname{ind} C(\lambda).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямым вычислением легко устанавливается, что для любых функций $y \in \mathfrak{H}_1$ и $z \in \mathfrak{H}_2$ выполняется равенство

$$\langle J^+ T_\rho(\lambda)\,(y+z), (y+z)\rangle = \langle [A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda)B]y, y\rangle + \langle C(\lambda)u, u\rangle,$$

где положено $u \rightleftharpoons z + C^{-1}(\lambda)By$. Доказываемое утверждение вытекает из этого равенства и утверждения 1.2. □

3. Рассмотрим величины ζ_k, где $k = 1, \ldots, n-1$, имеющие вид

$$\zeta_k \rightleftharpoons \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m\beta_1 & \text{при } k = m-1, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m\beta_n & \text{при } k = m, \\ \beta_{k+1} - \beta_k & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим также через $\mathrm{Z}_\pm$ две величины

$$\mathrm{Z}_\pm \rightleftharpoons \#\{k \in [1, n-1] \mid \pm\zeta_k > 0\}.$$

Имеют место следующие два факта:

3.1. *Для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} C(\lambda) = \mathrm{Z}_+.$$

Утверждение 3.1 немедленно вытекает из легко проверяемого тождества

$$(1) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathfrak{H}_2) \qquad \langle C(\lambda)y, y\rangle = \|y\|^2_{\mathfrak{H}} - \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_k \cdot |y(\alpha_k)|^2.$$

3.2. *Пусть выполнено равенство $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n-1$. Тогда для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ оператор $C(\lambda)$ является ограниченно обратимым, причём при $\lambda \to +\infty$ справедлива асимптотика*

$$\|C^{-1}(\lambda)\| = O(\lambda^{-1}).$$

Утверждение 3.2 также представляет собой несложное следствие тождества (1).

§ 3 Основные результаты

1. Имеют место следующие три факта:

1.1. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_+ > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n-1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \ldots, \mathrm{Z}_+$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи § 1.1* (1), *§ 1.1* (2) *удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+} = \mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство. Согласно утверждению § 2.3.2, найдётся такое вещественное число $\lambda_0 > 0$, что при любом $\lambda > \lambda_0$ будет выполняться неравенство $\|C^{-1}(\lambda)\| < \lambda_0/(3\lambda)$. Отсюда и из очевидной оценки $\|B\| \leqslant 1$ следует, что при любом $\lambda > \lambda_0$ будут также выполняться неравенства

$$(1) \qquad \operatorname{ind}[A(\lambda) + \lambda_0/(3\lambda)] \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^*C^{-1}(\lambda)B] \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - \lambda_0/(3\lambda)].$$

При этом с использованием очевидных равенств

$$\operatorname{ind}[A(\lambda) \pm \lambda_0/(3\lambda)] = \operatorname{ind}\big[(1 \pm \lambda_0/(3\lambda))^{-1} \cdot (A(\lambda) \pm \lambda_0/(3\lambda))\big]$$

из оценок (1) легко выводятся оценки

$$\operatorname{ind} A(\lambda - \lambda_0/2) \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda) B] \leqslant \operatorname{ind} A(\lambda + \lambda_0/2). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь неубывающую функцию $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad s(t) = \#\{k \geqslant 1 \mid \lambda_k < e^t\}.$$

Согласно теореме [СФ, Теорема 4.1], эта функция удовлетворяет тождеству

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad s(t) = \operatorname{ind} J^+ T_\rho(e^t).$$

Объединяя последнее тождество с оценками (2) и утверждениями § 2.2.1, § 2.2.2 и § 2.3.1, устанавливаем, что при любом $t > \ln \lambda_0$ будут справедливы оценки

$$s(t + \ln(a_m d_m) - \lambda_0 e^{-t}) + \mathrm{Z}_+ \leqslant s(t) \leqslant s(t + \ln(a_m d_m) + \lambda_0 e^{-t}) + \mathrm{Z}_+. \tag{3}$$

Из оценок (3) следует, что найдётся точка $t_0 > \ln \lambda_0$, для которой окрестность радиуса $2\lambda_0 e^{-t_0}/(1 - a_m d_m)$ не содержит точек разрыва функции s. Объединяя те же оценки с фактом простоты всех собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) (см., например, теорему [СФ, Теорема 4.1]), убеждаемся, что при любом $k \in \mathbb{N}$ отрезок

$$\Delta_k \rightleftharpoons [t_0 - k \cdot \ln(a_m d_m), t_0 - (k+1) \cdot \ln(a_m d_m)]$$

содержит ровно Z_+ точек разрыва функции s, причём каждая из них является внутренней точкой отрезка Δ_k. Кроме того, при любых $k \gg 0$ и $l = 1, \ldots, \mathrm{Z}_+$ расстояние между l-тыми слева точками разрыва функции s на отрезках Δ_k и Δ_{k+1} отличается от величины $-\ln(a_m d_m)$ не более, чем на $\lambda_0 e^{-t_0} \cdot (a_m d_m)^{k+1}$. Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. □

1.2. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_- > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \ldots, \mathrm{Z}_-$, для которых последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+k\mathrm{Z}_-)} = -\mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 1.2 аналогично доказательству утверждения 1.1.

1.3. *Пусть выполняются соотношения $d_m < 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \ldots, n-1$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+k(n-1)} = \mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи § 1.1 (1), § 1.1 (2) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+\mathrm{Z}_- + k(n-1))} = -\mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 1.3 также аналогично доказательству утверждения 1.1.

l	k	λ_{l+2k}	$\lambda_{l+2k}/6^k$
1	0	$4,93 \cdot 10^0 \pm 1\%$	4,9341 $\pm$ 10^{-4}
2	0	$1,36 \cdot 10^1 \pm 1\%$	13,6598 $\pm$ 10^{-4}
1	1	$4,94 \cdot 10^1 \pm 1\%$	8,2322 $\pm$ 10^{-4}
2	1	$8,85 \cdot 10^1 \pm 1\%$	14,7576 $\pm$ 10^{-4}
1	2	$2,96 \cdot 10^2 \pm 1\%$	8,2330 $\pm$ 10^{-4}
2	2	$5,31 \cdot 10^2 \pm 1\%$	14,7577 $\pm$ 10^{-4}
1	3	$1,78 \cdot 10^3 \pm 1\%$	8,2330 $\pm$ 10^{-4}
2	3	$3,19 \cdot 10^3 \pm 1\%$	14,7577 $\pm$ 10^{-4}

Таблица 1: Оценки первых собственных значений для случая $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$.

l	k	$-\lambda_{-(l+k)}$	$-\lambda_{-(l+k)}/6^k$
1	0	$5,10 \cdot 10^0 \pm 1\%$	5,1005 $\pm$ 10^{-4}
1	1	$2,60 \cdot 10^1 \pm 1\%$	4,3459 $\pm$ 10^{-4}
1	2	$1,56 \cdot 10^2 \pm 1\%$	4,3458 $\pm$ 10^{-4}
1	3	$9,39 \cdot 10^2 \pm 1\%$	4,3458 $\pm$ 10^{-4}

Таблица 2: Оценки первых собственных значений для случая $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

§ 4 Примеры

1. В таблице 1 представлены результаты численных расчётов для первых восьми положительных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = 2/3$, $\zeta_2 = 1/3$, $\mathrm{Z}_+ = 2$, $\mathrm{Z}_- = 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 3.1.1.

2. В таблице 2 представлены данные численных расчётов первых четырёх отрицательных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 3.1.2.

3. В таблице 3 представлены данные численных расчётов первых шести положительных и семи отрицательных (исключая первое) собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В

l	k	λ_{l+2k}	$\lambda_{l+2k}/6^{2k}$	$-\lambda_{-(l+1+2k)}$	$-\lambda_{-(l+1+2k)}/6^{2k+1}$
1	0	$4,31 \cdot 10^0 \pm 1\%$	$4{,}3146 \pm 10^{-4}$	$2,55 \cdot 10^1 \pm 1\%$	$4{,}2572 \pm 10^{-4}$
2	0	$3,81 \cdot 10^1 \pm 1\%$	$38{,}0536 \pm 10^{-4}$	$2,28 \cdot 10^2 \pm 1\%$	$38{,}0535 \pm 10^{-4}$
1	1	$1,53 \cdot 10^2 \pm 1\%$	$4{,}2572 \pm 10^{-4}$	$9,19 \cdot 10^2 \pm 1\%$	$4{,}2572 \pm 10^{-4}$
2	1	$1,37 \cdot 10^3 \pm 1\%$	$38{,}0535 \pm 10^{-4}$	$8,22 \cdot 10^3 \pm 1\%$	$38{,}0535 \pm 10^{-4}$
1	2	$5,52 \cdot 10^3 \pm 1\%$	$4{,}2572 \pm 10^{-4}$	$3,31 \cdot 10^4 \pm 1\%$	$4{,}2572 \pm 10^{-4}$
2	2	$4,93 \cdot 10^4 \pm 1\%$	$38{,}0535 \pm 10^{-4}$	$2,96 \cdot 10^5 \pm 1\%$	$38{,}0535 \pm 10^{-4}$

Таблица 3: Оценки первых собственных значений для случая $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 3.1.3.

4. При получении вышеприведённого иллюстративного материала нами была использована вычислительная методика, описанная в работе [ВСЗ].

Список литературы

[СФ] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*// Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13–30.

[ИШЛ] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов*// Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2006. — Т. 255. — С. 88–98.

[SSM] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures*// Bull. London Math. Soc. — 1995. — V. 27, № 3. — P. 242–248.

[ВСЗ] А. А. Владимиров. *О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом*// Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1350–1355.